Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

4260 Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Інтегральне числення» для студентів усіх інженерних спеціальностей денної форми навчання

Суми

Сумський державний університет

2017

Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Інтегральне числення» / укладачі: Н. І. Одарченко, І. О. Шуда. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 44 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Розділ 1

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основні питання розділу:

1. Означення невизначеного інтеграла.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця основних невизначених інтегралів.
4. Основні методи інтегралів:
   a) метод безпосереднього інтегрування;
   b) метод інтегрування підстановкою;
   c) метод інтегрування частинами;
   d) інтегрування деяких функцій.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на інтервалі ($a; b$), якщо для довільної $x \in (a; b)$ виконується рівність ____
Множина усіх первісних функції $F(x)+C$ для функції $f(x)$ називається __________
____
і позначається ____

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\int af(x)dx =$ ____
2. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx =$ ____
3. $\int f(kx+b)dx =$ ____

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int x^{\alpha}dx =$ ____ $\alpha \neq -1$
2. $\int dx =$ ____
3. $\int \frac{dx}{x} =$ ____
4. $\int a^{x}dx =$ ____
5. $\int e^{x}dx =$ ____
6. $\int \sin x dx =$ ____

7. $\int \cos x dx =$ ______________________________

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$ ______________________________

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$ ______________________________

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ ______________________________

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$ ______________________________

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} =$ ______________________________

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} =$ ______________________________

Безпосереднє інтегрування

Приклад 1. $\int \left(3x^2 - \frac{8}{x} + x^3 \right) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \ln|x| + \frac{x^4}{4} + C = x^3 - 8\ln|x| + \frac{1}{4}x^4 + C$.

Приклад 1 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \left((5k+1)x^{2k-3} - \frac{8k}{x^k} + x^{k-1} \right) dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

____

____

____

Приклад 2. $\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx = \int (1+3x)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+3x)^4} + C$.

Приклад 2 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sqrt[3k-1]{1+(2k+1)x}\,dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

____

____

____

Приклад 3. Обчислити $\int \frac{dx}{6x+1} = \frac{1}{6}\ln|6x+1| + C$.

Приклад 3 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(8k-1)x-4}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 4. Обчислити $\int \sin(9x+7)\,dx = -\frac{1}{9}\cos(9x+7) + C$.

Приклад 4 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int cos((5k+3)x-3)\,dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 5. Обчислити $\int e^{6x-4}dx = \frac{1}{6}e^{6x-4} + C$.

Приклад 5 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int e^{(1-3k)x+5}dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 6. Обчислити $\int \frac{dx}{9x^2+3} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{9}} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{3}}} + C$.

Приклад 6 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(2k+3)x^2+k}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 7. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{4}{7} - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{7}}} + C$.

Приклад 7 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{(3k+2)-(5k-1)\cdot x^2}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 8. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{x^2+\frac{2}{9}}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{9}}} = \frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{2}{9}}\right| + C$.

Приклад 8 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{(7k-2)x^2-(3k+1)}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 9. Обчислити $\int \frac{dx}{3x^2-7} = \int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{7}{3}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\frac{7}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{3}}}{x+\sqrt{\frac{7}{3}}}\right| + C$.

Приклад 9 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(2k+1)x^2-(3k+2)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 10. Обчислити

$$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 6x\right) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x \right) + C.$$

Приклад 10 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sin^2 \left(4k-3\right) x dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Метод інтегрування підстановкою

Приклад 11. Обчислити

$$\int \frac{xdx}{3x^2+8} = \left\{ \begin{array}{c} 3x^2+8=t \\ dt = 6xdx \\ xdx = \frac{1}{6}dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{6}dt}{t} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln|t| + C = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+8\right| + C.$$

Приклад 11 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{xdx}{\left(8k-5\right)x^2 + \left(k+1\right)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 12. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\left(x+2\right)\sqrt{\ln\left(x+2\right)}} = \left\{ \begin{array}{c} \ln\left(x+2\right) = t \\ dt = \frac{dx}{\left(x+2\right)} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln\left(x+2\right)} + C.$$

Приклад 12 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\sqrt{\ln^{2k+1}(kx+1)}}{kx+1} dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 13. Обчислити

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx = \left\{ \begin{array}{c} \cos 3x = t \\ dt = -3\sin 3x dx \\ \sin 3x dx = -\frac{1}{3} dt \end{array} \right\} = \int \frac{-\frac{1}{3} dt}{t^2} = -\frac{1}{3} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + C \cdot$$

Приклад 13 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\cos(4k-1) x dx}{\sqrt{\sin^{k+1}(4k-1) x}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 14. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\mathrm{tg}^3 x}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{tg}\, x = t \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \int t^{-3/2} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}} + C .$$

Приклад 14 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^{3k+1}(2k) x}}{\cos^2(2k) x} dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 15. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^3 x} = \left\{\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= t \\ dt &= \frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}\right\} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 x} + C.$$

Приклад 5 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^{(2k-1)} x}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 16. Обчислити

$$\int e^{4-3x^2} x dx = \left\{\begin{aligned} 4-3x^2 &= t \\ dt &= -6xdx \\ xdx &= -\frac{1}{6}dt \end{aligned}\right\} = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)dt = -\frac{1}{6}\int e^t dt = -\frac{1}{6}e^t + C = -\frac{1}{6}e^{4-3x^2} + C.$$

Приклад 16 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int e^{5-2(7-6k)x^2} xdx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 17. Обчислити

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \left\{\begin{aligned} 1+\ln x &= t \\ dt &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}\right\} = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\ln x\right)^3} + C.$$

Приклад 17 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\left(\left(2k-8\right)+\ln x\right)^{5k+1}}{x}dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 18. Обчислити

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x-7} = t \\ x-7 = t^2 \\ x = t^2+7 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{\left(t^2+7\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+7} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{7}} + C.$$

Приклад 18 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+(5k-4)}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 19. Обчислити

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}-5} = \left\{ \begin{array}{l} e^{3x}-5 = t \\ dt = 3e^{3x}dx \\ e^{3x}dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}-5\right| + C.$$

Приклад 19 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{e^{(4k-3)x}dx}{e^{(4k-3)x}+(6-7k)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 20. Обчислити

$$\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx = \int \frac{3xdx}{6x^2-4} + 10\int \frac{dx}{6x^2-4} = 3\int \frac{xdx}{6x^2-4} + \frac{10}{6}\int \frac{dx}{x^2-{}^2\!/_3} = \left\{ \begin{array}{l} 6x^2-4 = t \\ 12xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{12}dt \end{array} \right\} =$$

$$= 3\int \frac{\frac{1}{12}dt}{t} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln|t| + \frac{5}{6\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|6x^2-4\right| + \frac{5}{6\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C \cdot$$

Приклад 20 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{(3k-1)x+2k}{(k+1)x^2+(8k+6)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Метод інтегрування частинами

Цей метод базується на формулі $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$.

Приклад 21. Обчислити

$$\int x\cdot e^{-2x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-2x}dx & v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{matrix}\right\} = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C\cdot$$

Приклад 21 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int x\cdot e^{3k+7}dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 22. Обчислити

$$\int \operatorname{arctg} 3x dx = \left\{\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}3x & du=\frac{3dx}{1+9x^2} \\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right\} = x\cdot\operatorname{arctg}3x - \int x\cdot\frac{3dx}{1+9x^2} = x\cdot\operatorname{arctg}3x - 3\int\frac{xdx}{1+9x^2} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1+9x^2=t \\ dt=18xdx \\ xdx=\frac{1}{18}dt\end{matrix}\right\} = x\cdot\operatorname{arctg}3x - 3\int\frac{\frac{1}{18}dt}{t} = x\cdot\operatorname{arctg}3x - \frac{1}{6}\int\frac{dt}{t} = x\cdot\operatorname{arctg}3x - \frac{1}{6}\ln|t| + C =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}3x - \frac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right| + C.$$

Приклад 22 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \operatorname{arctg}(2k-1)xdx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 23. Обчислити

$$\int \ln(2x+8)\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(2x+8) & du = \dfrac{2xdx}{2x+3} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\} = x\ln(2x+3) - \int \frac{2dx}{2x+3}dx =$$

$$= x\ln(2x+3) - \int \frac{(2x+3)-3}{2x+3}dx = x\ln(2x+3) - \int \left(1 - \frac{3}{2x+3}\right)dx = x\ln(2x+3) - x + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln|2x+3| + C.$$

Приклад 23 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \ln((3k-1)x+3)\,dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 24. Обчислити

$$\int \arcsin 8x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \arcsin 8x & du = \dfrac{8dx}{\sqrt{1-64x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2}\arcsin 8x - 8\int \frac{x\cdot 8\cdot dx}{\sqrt{1-64x^2}} = \left\{ \begin{matrix} 1-64x^2 = t \\ dt = -128xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-128} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin 8x - 8\int \frac{-dt}{128\cdot\sqrt{t}} = \frac{x^2}{2}\arcsin 8x + \frac{8}{128}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{x^2}{2}\arcsin 8x + \frac{1}{8}\cdot\sqrt{1-64x^2} + C.$$

Приклад 24 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \arcsin(2k-1)x\,dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 25. Обчислити

$$\int x\cdot \operatorname{arctg}2xdx=\left\{\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}2xdx & du=\dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{2dx}{1+4x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\int \frac{x^2}{4x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int \frac{x^2}{x^2+\frac{1}{4}}dx=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int \frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}}{x^2+\frac{1}{4}}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int \left(1-\frac{\frac{1}{4}}{x^2+\frac{1}{4}}\right)dx=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)+C=\frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C\cdot$$

Приклад 25 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int x\operatorname{arctg}(3x+2)xdx$.

____

____

____

____

Приклад 26. Обчислити

$$\int (x+8)\sin 3xdx=\left\{\begin{matrix} u=x+8 & du=dx \\ dv=\sin 3xdx & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right\}=(x+8)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)-\int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx=$$

$$=(x+8)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+\frac{1}{3}\cdot \frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

Приклад 26 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int (x+(5k-3))\cdot \sin(5k-3)xdx$, k – номер студента в аудиторному списку.

____

____

____

____

Приклад 27. Обчислити

$$\int x\ln(3x+1)dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln(3x+1) & du=\dfrac{3dx}{3x+1} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln(3x+1)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{3dx}{3x+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(3x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{3x^2}{3x+1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(3x+1)-\frac{1}{2}\int\left(x-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(3x+1)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\ln|3x+1|\right)+C\,.$$

Приклад 27 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int x\ln((3k-2)x+3)dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 28. Обчислити

$$\int\frac{xdx}{\cos^2 4x}=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 4x} & v=\dfrac{1}{4}\cdot\operatorname{tg}4x\end{matrix}\right\}=x\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x\right)-\int\frac{1}{4}\operatorname{tg}4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}x\cdot\operatorname{tg}4x-\frac{1}{4}\int\frac{\sin 4x}{\cos 4x}dx=\frac{1}{4}x\cdot\operatorname{tg}4x+\frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{4}dt}{t}=\left\{\begin{matrix}\cos 4x=t \\ dt=-4\sin 4xdx \\ \sin 4xdx=-\dfrac{1}{4}dt\end{matrix}\right\}=\frac{1}{4}x\cdot\operatorname{tg}4x+\frac{1}{16}\ln|t|+C=$$

$$\frac{1}{4}x\cdot\operatorname{tg}4x+\frac{1}{16}\ln|\cos 4x|+C\,.$$

Приклад 28 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\dfrac{xdx}{\cos^2(k+3)x}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 29. Обчислити

$$\int(2x-1)\cdot e^{x}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2dx \\ dv=e^{x}dx & v=e^{x}\end{matrix}\right\}=(2x-1)e^{x}-\int 2e^{x}dx=(2x-1)e^{x}-2e^{x}+C.$$

Приклад 9 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int((5k-2)x+3)e^{x}dx,\ k$ – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 30. Обчислити

$$\int(x^{2}-1)\cos 2xdx=\left\{\begin{matrix} u=x^{2}-1 & du=2xdx \\ dv=\cos 2xdx & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right\}=(x^{2}-1)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin 2xdx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right\}=(x^{2}-1)\frac{1}{2}\sin 2x-\left(-\frac{1}{2}\text{x}\cos 2x-\int-\frac{1}{2}\cos 2xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x^{2}-1)\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Приклад 30 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int(x^{2}-(2k-5))\cos(2k+5)xdx,\ k$ – номер студента в аудиторному списку.

Інтегрування деяких функцій

1. Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен

Приклад 31. Обчислити

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+8}=\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+8}=$$

$$=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{23}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{23}{4}}}+C\,.$$

$$x^2+bx+c=x^2+2\cdot\frac{b}{2}x+c=$$
$$x^2+2\cdot\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right).$$

Приклад 31 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\frac{dx}{x^2+(2k-5)x+(k-11)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 32. Обчислити

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot 2x+4-4+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-3}}=\ln\left|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C\,.$$

Приклад 32 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2kx-(3k-15)}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 33. Обчислити

$$\int \frac{(x-3)dx}{x^2-5x+4} = \int \frac{(x-3)dx}{x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+4} = \int \frac{(x-3)dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \left\{\begin{matrix} x-\frac{5}{2}=t \\ dx=dt \\ x=t+\frac{5}{2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{t+\frac{5}{2}-3}{t^2-\frac{9}{4}}dt = \int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{9}{4}}dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2-\frac{9}{4}}dt - \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2-\frac{9}{4}}dt = \left\{\begin{matrix} t^2-\frac{9}{4}=z \\ dz=2tdt \\ tdt=\frac{1}{2}dz \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{9}{4}\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C.$$

Приклад 33 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{(x+(k-1))dx}{x^2+2kx+(k-9)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

---

2. Інтегрування раціональних функцій

Приклад 34. Обчислити

$$\int \frac{dx}{(5x-1)^7} = \int (5x-1)^{-7}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-1)^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{(5x-1)^6} + C.$$

Приклад 34 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{((7k-20)x+k)^{2k+5}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 35. Обчислити

$$\int \frac{(x-4)dx}{x^2-5x+6} = \left\{ \begin{array}{c} x^2-5x+6=0 \\ D=25-4\cdot 6=25-24=1 \\ x_1=\dfrac{5+1}{2}=3; \quad x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{array} \right\} = \int \frac{(x-4)dx}{(x-3)(x-2)} = \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{B}{x-2}dx,$$

$$\frac{x-4}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}.$$

Нехай $x=2$, тоді $A(2-2)+B(2-3)=2-4$, $\quad -B=-2, \quad B=2.$

Нехай $x=3$, тоді $A(3-2)+B(3-3)=3-4$, $\quad A=-1.$

Маємо $\int \frac{(x-4)dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{-1}{x-3}\right)dx + \int \frac{2}{x-2}dx = -\ln|x-3| + 2\ln|x-2| + C$.

Приклад 35 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{x-k}{(x-2k)(x+k)dx}$, k – номер студента в аудиторному списку.

____

____

____

____

Приклад 36. Обчислити

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Нехай $x=1$, тоді $1=A(1^2+1)+(1-1)(B\cdot 1+C)$, $1=2A, \quad A=\frac{1}{2}.$

Нехай $x=0$, тоді $0=\frac{1}{2}(0+1)+(0-1)(B\cdot 0+C)$, $0=\frac{1}{2}-C, \quad C=\frac{1}{2}.$

Нехай $x=-1$, тоді $-1=\frac{1}{2}\left((-1)^2+1\right)+(-1-1)\left(-B+\frac{1}{2}\right)$,

$-1=1+2B-1,\quad 2B=-1,\quad B=-\frac{1}{2}.$

Маємо

$$\int\frac{xdx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left(\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\left\{\begin{array}{l}x^2+1=t\\ dt=2xdx\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Приклад 36 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\frac{(x-k)dx}{(x+k)\left(x^2+k\right)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

---

3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Приклад 37. Обчислити

$$\int\frac{dx}{3x-4\sqrt{x}}=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right\}=\int\frac{2tdt}{3t^2-4t}=2\int\frac{tdt}{t(3t-4)}=2\int\frac{dt}{3t-4}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\ln|3t-4|+C=$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|3\sqrt{x}-4\right|+C.$$

Приклад 37 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\frac{dx}{(5k-7)x+2k\sqrt{x}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 38. Обчислити

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\left\{\begin{matrix} x^{\frac{1}{3}};\quad x^{\frac{1}{2}} \\ HCK(2,3)=6 \\ \sqrt[6]{x}=t;\quad x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{matrix}\right\}=\int\frac{6t^5dt}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^5dt}{t^2(1+t)}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|+C\right)=2\sqrt[6]{x^3}-3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Приклад 38 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+k}+\sqrt{x+k}}$, k – номер студента в аудиторному списку.

4. Інтегрування тригонометричних функцій

Приклад 39. Обчислити

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\left|\begin{matrix} \textit{універсальна тригонометрична підстановка} \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2}=2\int\frac{dt}{2t+2}=\int\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

Приклад 39 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(2k-1)\sin x+(k+1)\cos x}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 40. Обчислити

$$\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx = \left\{ \begin{matrix} \textit{скористаємося формулою} \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int\left(\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right)+C.$$

Приклад 40 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sin(2k-3)x \cdot \cos(2k)x dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 41. Обчислити

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C.$$

Приклад 41 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sin^2(5k-1)x dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Розділ 2

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основні питання розділу:

1. Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона – Лейбніца.
2. Невласні інтеграли:
   a) з нескінченними межами інтегрування;
   b) від розривних функцій.

Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Приклад 1. Обчислити $\int_1^2 3(x-1)^2 dx = 3\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^2 = (x-1)^3\Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = 1.$

Приклад 1 (для самостійної роботи). Обчислити $\int_1^2 (k+1)\left(x-(k+1)\right)^2 dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

____

____

____

Приклад 2. Обчислити

$$\int_1^2\left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx = \left(2\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3} - \frac{2}{24} = \frac{126}{24} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}.$$

Приклад 2 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int_1^2\left(2k\cdot x^2 + \frac{2k}{x^4}\right)dx$, k – номер студента в аудиторному списку

____

____

____

Приклад 3. Обчислити

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi=\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi=\left\{\begin{matrix}\cos\varphi=t\\ dt=-\sin\varphi d\varphi\end{matrix}\right\}=\int_1^0\left(1-\cos^2\varphi\right)\cdot\left(-dt\right)=\int_0^1\left(1-t^2\right)dt=$$

$$=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}.$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

Приклад 3 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int_0^{\pi/2}\sin^3\left(2k+1\right)\varphi d\varphi$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 4. Обчислити

$$\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\left\{\begin{matrix}\sqrt{1+x}=t\\ 1+x=t^2\\ dx=2tdt\\ x=t^2-1\end{matrix}\right\}=\int_2^3\frac{\left(t^2-1\right)\cdot 2tdt}{t}=2\int_2^3\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3=2\left(\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{8}{3}-2\right)\right)=$$

$$=2\left(6-\frac{8}{3}+2\right)=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}.$$

x	3	8
t	2	3

Приклад 4 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x+k}}dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 5. Обчислити

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+4+1}=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1}=\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{1}\right)\Big|_0^1=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2.$$

Приклад 5 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2kx+k}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 6. Обчислити

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x\end{vmatrix}=x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

Приклад 6 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int_0^{\pi/2}\left(x+k\right)\cdot\sin x dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 7. Обчислити

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{-2x}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-2x} & v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{vmatrix}=x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}e^{-2x}dx=0+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}=$$

$$=-\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}\left(e^{0}-e^{1}\right)=-\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e=-\frac{1}{4}.$$

Приклад 7 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int_0^1 \left(kx\right)e^{kx}dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 8. Обчислити $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)} = \int\limits_1^2 \frac{A\cdot dx}{x+1} + \int\limits_1^2 \frac{B\cdot dx}{x+2}$,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)},$$

$$x=-1, \qquad -1 = A(-1+2)+B(-1+1), \qquad -1 = A,$$

$$x=-2, \qquad -2 = A(-2+2)+B(-2+1), \qquad B=2,$$

$$\int\limits_1^2 \frac{-1}{x+1}dx + \int\limits_1^2 \frac{2}{x+2}dx = -\ln|x+1|\Big|_1^2 + 2\ln|x+2|\Big|_1^2 = -\ln|2+1| + \ln|1+1| + 2\ln|2+2| - 2\ln|1+2| =$$

$$= -\ln 3 + \ln 2 + 2\ln 4 - 2\ln 3 = -3\ln 3 + \ln 2 + 2\ln 4.$$

Приклад 8 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\limits_1^3 \frac{(x+k)dx}{(x+1)(x-2k)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 9. Обчислити

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + \sqrt{3}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3} = 2\int\limits_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2-2t^2+3+3t^2}{1+t^2}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}} - \mathrm{arctg}\,0\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Приклад 9 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{k\sin x + (k+1)}$, k – номер студента в аудиторному списку.

Приклад 10. Обчислити

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx =$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

Приклад 10 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\limits_1^e x^k \ln kx dx$, k – номер студента в аудиторному списку.

Невласні інтеграли

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ +\infty)$, то границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ називається невласним інтегралом І-го роду і позначається $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо границя у правій частині рівності існує і скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним. Якщо ж границя не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл називається розбіжним.

Аналогічно визначається інтеграл на проміжку $(-\infty;\ b]$: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1.$$ Цей інтеграл збігається.

Приклад 1 (для самостійної роботи)

Обчислити $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2k/5}}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x(3+\ln x)}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x(3+\ln x)}=\left|\begin{matrix}3+\ln x=t\\ dt=\dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right|=\lim_{b\to\infty}\int\limits_3^{3+\ln b}\frac{dt}{t}=\lim_{b\to\infty}\ln|t|\Big|_1^{3+\ln b}=\lim_{b\to\infty}\left(\ln(3+\ln b)-\ln 3\right)=\infty.$$

x	1	b
t	3	3+ln b

Цей інтеграл розбігається.

Приклад 2 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x(k+\ln x)^{4k/3}}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{8+x^2}}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{xdx}{\sqrt{8+x^2}}=\left|\begin{matrix}8+x^2=t\\ dt=2xdx\\ xdx=\dfrac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\lim_{b\to\infty}\int\limits_9^{8+b^2}\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}\Big|_9^{8+b^2}=\lim_{b\to\infty}\sqrt{t}\Big|_9^{8+b^2}=\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{8+b^2}-\sqrt{9}\right)=\infty.$$

x	1	b
t	9	$8+b^2$

Цей інтеграл розбігається.

Приклад 3 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{k+(3k-1)x^2}}$.

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{16x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{16x^2+1}dx = \left| \begin{gathered} \operatorname{arctg} 4x = t \\ dt = \frac{4dx}{1+16x^2} \\ \frac{dx}{1+16x^2} = \frac{1}{4}dt \end{gathered} \right| = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} 4b} t\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} 4b} tdt = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\operatorname{arctg} 4b} =$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{b\to\infty} t^2\Big|_0^{\operatorname{arctg} 4b} = \frac{1}{8}\lim_{b\to\infty}\left((\operatorname{arctg} 4b)^2 - 0\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Цей інтеграл збігається.

x	0	b
t	0	arctg 4b

Приклад 4 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2k+1)x}{(2k+1)^2x^2+1}dx$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos xdx}{5+3\sin x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \frac{\cos xdx}{5+3\sin x} = \left| \begin{gathered} 5+3\sin x = t \\ dt = 3\cos xdx \\ \cos xdx = \frac{1}{3}dt \end{gathered} \right| = \lim_{b\to\infty}\int\limits_5^{5+3\sin b} \frac{\frac{1}{3}dt}{t} = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int\limits_5^{5+3\sin b} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln t\Big|_5^{5+3\sin b} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\ln(5+3\sin b) - \ln 5\right).$$

x	0	b
t	5	5+3sin b

Не існує цієї границі. Отже, інтеграл розбігається.

Приклад 5 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos xdx}{2k+(5k-7)\sin x}$.

Приклад 6. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{\ln b} tdt = \lim_{b\to\infty}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\ln b} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left((\ln b)^2 - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty.$$

x	1	b
t	0	ln b

Цей інтеграл розбігається.

Приклад 6 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\ln^{(k+3)} xdx}{x}$.

---

2. Невласні інтеграли від розривних функцій

Якщо функція $f(x)$ неперервна при $a \le x \le c$ і має нескінченний розрив у точці $x = c$, то границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ називається невласним інтегралом другого роду і позначається $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$.

Якщо у правій частині границя існує і скінченна, то невласний інтеграл збігається. Якщо ж границя не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл називається розбіжним.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ неперервна при $c \le x \le b$ і має розрив у точці с, то

$$\int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1}+\frac{1}{-1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty .$$

Інтеграл розбігається.

Приклад 7 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{2k-1}}$.

Приклад 8. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{(0+\varepsilon)^2}\right) = \frac{(1-\infty)}{-2} = \infty .$$

Інтеграл розбігається.

Приклад 8 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2k+3}}$.

Приклад 9. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-(1-\varepsilon)}+2\sqrt{1-0}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\right) = 0+2 = 0 \cdot$$

Інтеграл збігається.

Приклад 9 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int_0^k \frac{dx}{\sqrt{k-x}}$.

Приклад 10. Обчислити інтеграл

$$\int_1^3 \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x\ln x} = \left|\begin{matrix}\ln x = t\\ dt = \frac{1}{x}dx\end{matrix}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 3}\frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln t\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 3 - \ln\ln\left(1+\varepsilon\right)\right) = \infty .$$

x	$1+\varepsilon$	3
t	$\ln(1+\varepsilon)$	ln3

Інтеграл розбігається.

Приклад 10 (для самостійної роботи)

Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^{k+1} x}$.

Розділ 3

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

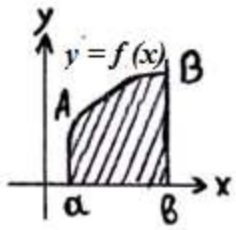
Основні питання розділу:

1. Обчислення площ у декартових координатах.
2. Обчислення площ фігур, заданих у параметричному вигляді.
3. Обчислення площі фігури, заданої в полярних координатах.
4. Обчислення довжини дуги кривої, заданої в декартових координатах.
5. Обчислення довжини дуги кривої, заданої параметричними координатами.
6. Довжина дуги у полярних координатах.
7. Обчислення об'ємів тіл.

Обчислення площ у декартових координатах

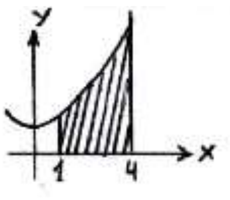
Якщо функція $f(x) \geq 0$ і неперервна на відрізку [a; b], то площа криволінійної трапеції аАВв, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю оХ і прямими х = а, х = в,

дорівнює $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.



Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:

$y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

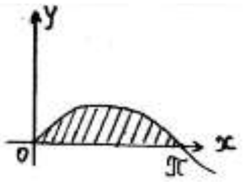


$$S = \int\limits_1^4 \left(x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} + 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) = 24.$$

Приклад 1 (для самостійної роботи)

Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій: $y = kx^2 + (k+1)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$ і віссю Ох.



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2 .$$

Приклад 2 (для самостійної роботи)

Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = (k+1)\sin x$, $x \in [0; \pi]$, та віссю Ох.

___

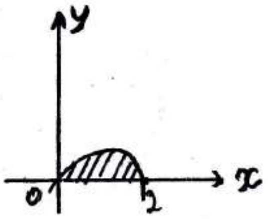
___

___

___

___

Приклад 3. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої кривою $y = 2x - x^2$ і віссю Ох.



Знайдемо точки перетину кривої з віссю Ох:

$$2x - x^2 = 0,$$

$$x(2-x) = 0,$$

$$x = 0;\ x = 2.$$

$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) = \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Приклад 3 (для самостійної роботи)

Знайти площу плоскої фігури, обмеженої кривою $y = (2k-1)x - x^2$ і віссю Ох.

___

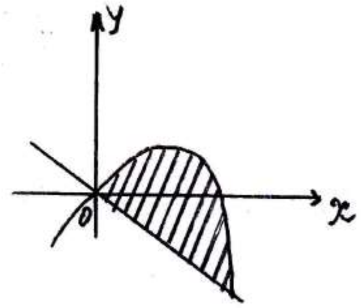
___

___

___

___

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 3x - x^2$ і $y = -x$.



Знаходимо точки перетину даних кривих і будуємо шукану фігуру: $\begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x, \\ 3x - x^2 = -x; \end{cases}$

$3x - x^2 + x = 0,$

$4x - x^2 = 0,$

$x(4 - x) = 0,$

$x = 0;\ x = 4.$

$$S = \int_0^4 (3x - x^2 + x)dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 2 \cdot 16 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Приклад 4 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = kx + x^2$ і $y = -x$.

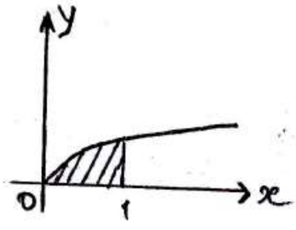
____

____

____

____

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$ та віссю Ox.



$$S = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Приклад 5 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x + k}$, $x = 0$, $x = 2$ та віссю Ox.

____

____

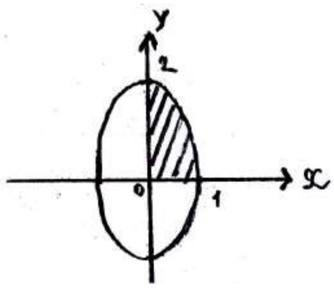
____

____

Обчислення площ фігур, заданих у параметричному вигляді

Якщо верхня границя AB криволінійної трапеції задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$, де $\alpha \le t \le \beta$ і $x(\alpha) = a$, $y(\beta) = b$, то площа криволінійної трапеції визначається за формулою $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt$.

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом: $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.



Запишемо параметричне рівняння еліпса: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$.

З урахуванням властивостей симетрії фігури та формули маємо

$$S = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} 2\sin t(-\sin t)\,dt = 8\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = 8\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 4\int\limits_{0}^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,dt = 4\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin \pi\right) = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Приклад 6 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом: $\dfrac{x^2}{k^2} + \dfrac{y^2}{(k+1)^2} = 1$.

____

____

____

____

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$. Скористаємося формулою $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt$.

Маємо

$$S = \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos t^2\right)dt = (t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} +$$

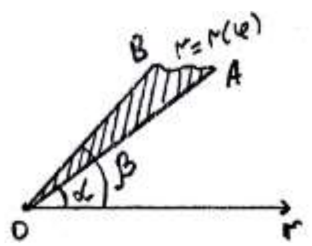
$$+\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = (2\pi - 2\sin 2\pi) + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{1}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi\right) = 2\pi + \pi = 3\pi.$$

Приклад 7 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої лінією: $\begin{cases} x=(k+1)t-\sin t, \\ y=(k+1)-\cos t. \end{cases}$

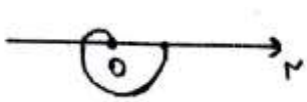
Обчислення площі фігури, заданої в полярних координатах

Площа сектора OAB, обмеженого кривою AB, заданого рівнянням у полярних координатах $r=r(\varphi)$ і променями $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\beta$, $(\alpha<\beta)$, визначається формулою



$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої одним витком спіралі Архімеда $r=5\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

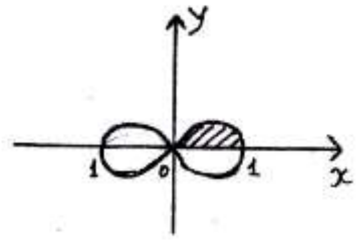


$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 25\varphi^2 d\varphi=\frac{25}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\frac{25}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{25}{6}(2\pi)^3=\frac{25}{6}\cdot 8\pi^3=\frac{100\pi^3}{3}.$$

Приклад 8 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої одним витоком спіралі Архімеда $r=(2k)\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Приклад 9. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$.



$\cos 2\varphi \geq 0$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$.

З урахуванням властивостей симетрії фігури шукана площа S може бути обчислена за формулою

$$S=4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\cos 2\varphi d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\left(\sin 2\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Приклад 9 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $r=(k+2)\sqrt{\cos 2\varphi}$.

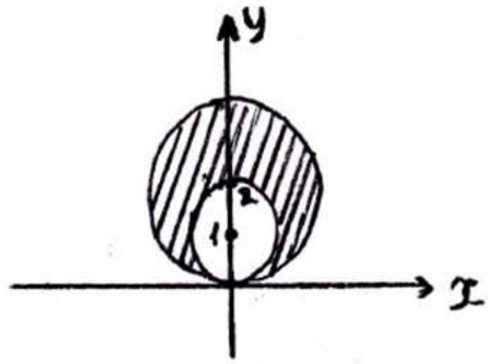
____

____

____

____

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $r=\sin\varphi$, $r=2\sin\varphi$. З урахуванням симетрії фігури шукана площа може бути обчислена за формулою



$$S=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(2\sin\varphi)^2 d\varphi-2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\sin\varphi)^2 d\varphi=\int_0^{\pi/2}4\sin^2\varphi d\varphi-\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi=4\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos 2\varphi)}{2}d\varphi-$$

$$-\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos\varphi)}{2}d\varphi=2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{3}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

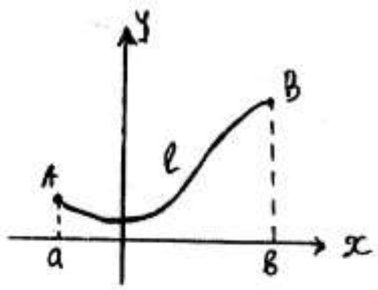
Приклад 10 (для самостійної роботи).

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $r=(k+1)\sin\varphi$, $r=(2k+3)\sin\varphi$.

Обчислення довжини дуги кривої, заданої в декартових координатах

Нехай дуга AB кривої задана рівнянням $y = f(x)$. Тоді довжина дуги AB

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y^{'}\right)^2}\,dx.$$



Приклад 1. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, абсциси кінців якої $x_1 = 3$, $x_2 = 8$.

Згідно з формулою будемо мати:

$$l = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} y = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \\ y^{'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x} \end{array} \right| = \int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Big|_3^8 =$$

$$= \frac{2}{3}(1+8)^{3/2} - \frac{2}{3}(1+3)^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}.$$

Приклад 11 (для самостійної роботи).

Обчислити довжину дуги кривої $y = (k+1)\sqrt{(x+k)^3}$, абсциси кінців якої $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Приклад 12. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{4}{3}x$, розміщеної між точками з абсцисами $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Згідно з формулою будемо мати

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\begin{vmatrix} y=\frac{4}{3}x \\ y'=\frac{4}{3}\end{vmatrix}=\int_2^5\sqrt{1+\frac{16}{4}}dx=\int_2^5\sqrt{\frac{25}{9}}dx=\frac{5}{3}x\Big|_2^5=\frac{5}{3}(5-2)=\frac{5}{3}\cdot 3=5.$$

Приклад 12 (для самостійної роботи).

Обчислити довжину дуги кривої $y=\frac{k}{k+1}x$, розміщеної між точками з абсцисами $x_1=1,\ x_2=2$.

____

____

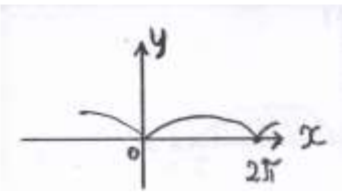
____

____

Обчислення довжини дуги кривої, заданої параметричними координатами

Нехай дуга AB кривої задана рівнянням $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t).\end{cases}$. Тоді довжина дуги AB обчислюється за формулою $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt$.

Приклад 13. Обчислити довжину однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t.\end{cases}$



Якщо розглядаємо одну арку циклоїди, то t змінюється від 0 до 2π.

Тоді

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=\begin{vmatrix} x_t'=1-\cos t \\ y_t'=\sin t\end{vmatrix}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2\cdot 2\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-4\left(\cos\frac{2\pi}{2}-\cos 0\right)=$$

$$=-4(\cos\pi-\cos 0)=-4\cdot(-2)=8.$$

Приклад 13 (для самостійної роботи).

Обчислити довжину однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=(k+1)(t-\sin t), \\ y=(k+1)(1-\cos t).\end{cases}$

Приклад 14. Знайти довжину кола $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Згідно з формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2 + \left(y_t^{'}\right)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \begin{vmatrix} x_t^{'} = -\sin t \\ y_t^{'} = \cos t \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = t\Big|_0^{2\pi} = \left(2\pi - 0\right) = 2\pi .$$

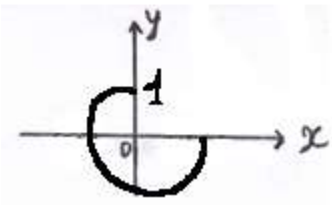
Приклад 14 (для самостійної роботи).

Знайти довжину кола $\begin{cases} x = \left(k+1\right)\cos t, \\ y = \left(k+1\right)\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Довжина дуги в полярних координатах

Довжина дуги AB кривої, заданої рівнянням $r = r\left(\varphi\right)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, визначається формулою $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(r^{'}\right)^2} d\varphi$.

Приклад 15. Знайти довжину першого витка логарифмічної спіралі $r = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.



Із формули випливає, що

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(e^{\varphi}\right)^2 + \left(e^{\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{\varphi} d\varphi = \sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - e^0\right) = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right).$$

Приклад 15 (для самостійної роботи).

Знайти довжину першого витка логарифмічної спіралі $r = e^{(k+1)\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

____

____

____

____

Приклад 16. Обчислити довжину кривої $r = 1 + \cos\varphi$, $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$.

Згідно з формулою

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(r'\right)^2}\, d\varphi = \left| r' = -\sin\varphi \right| = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\left(1+\cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2\left(1+\cos\varphi\right)}\, d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = -2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -4\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= -4\left(\sin\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Приклад 16 (для самостійної роботи).

Обчислити довжину кривої $r = \left(k+1\right)\left(1 - \sin\varphi\right)$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

____

____

____

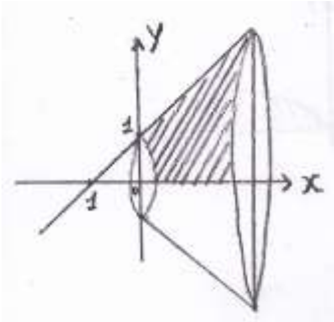
____

Обчислення об'ємів тіл

При обертанні навколо осі Ох криволінійної трапеції аАВв площі поперечних перерізів дорівнюють $S\left(x\right) = \pi\left(f\left(x\right)\right)^2$. Тому об'єм тіла вираховують за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx.$$

Приклад 17. Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ох фігури, що лежить у площині Оху та обмежена лініями $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.



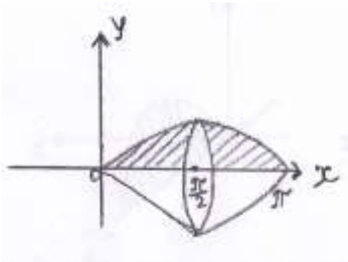
Згідно з формулою

$$V_x = \pi\int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left((1+1)^3-(0+1)^3\right) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Приклад 17 (для самостійної роботи).

Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ох фігури, що лежить у площині Оху та обмежена лініями $y=\left(x+(k+1)\right)$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

Приклад 18. Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ох фігури, що лежить у площині Оху та обмежена лініями $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$.



Згідно з формулою

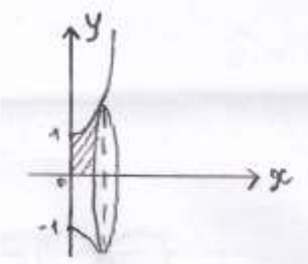
$$V_x = \pi\int_0^{\pi}\left(\sin^2 x\right)dx = \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\pi-\left(\frac{1}{2}\sin 2\cdot\pi-0\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Приклад 18 (для самостійної роботи).

Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ох фігури, що лежить у площині Оху та обмежена лініями $y=(2k-1)\cos x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Приклад 19. Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ох фігури, що лежить у площині Оху та обмежена лініями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.



Згідно з формулою

$$V_x = \pi\int_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1^5}{5}+2\frac{1^3}{3}+1\right) = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \pi\left(\frac{3+10+15}{15}\right) = \pi\cdot\frac{28}{15}.$$

Приклад 19 (для самостійної роботи).

Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ox фігури, що лежить у площині Oxy та обмежена лініями $y=\left(x^2+(k+1)\right)$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

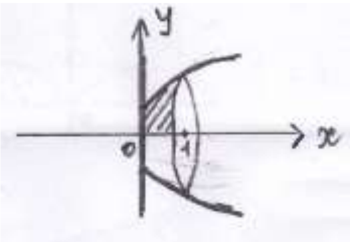
____

____

____

____

Приклад 20. Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ox фігури, що лежить у площині Oxy та обмежена лініями $y=\sqrt{3x+1}$, $x=0$, $x=1$.



Згідно з формулою

$$V_x = \pi\int_0^1 (3x+1)dx = \pi\left(3\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(3\frac{1^2}{2}+1\right) = \pi\left(\frac{3}{2}+1\right) = \pi\cdot\frac{5}{2}.$$

Приклад 20 (для самостійної роботи).

Обчислити об'єм тіла, одержаного під час обертання навколо осі Ox фігури, що лежить у площині Oxy та обмежена лініями $y=\sqrt{kx+(3k-1)}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

____

____

____

____

Навчальне видання

Робочий зошит
із дисципліни «Вища математика»
на тему «Інтегральне числення»
для студентів усіх інженерних спеціальностей
денної форми навчання

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор С. М. Симоненко
Комп’ютерне верстання М. А. Руденко

Підписано до друку 20.07.2017, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2,56. Обл.-вид. арк. 2,97. Тираж 200 пр. Зам. №
Собівартість вид.   грн   к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.